PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2024

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

PROBLEMA 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \dfrac{ax^3 + b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c. Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

d. Sia $S(k)$, con $k > \dfrac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim\limits_{k\to+\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

PROBLEMA 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. […] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo» (*E. De Giorgi*)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a. Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

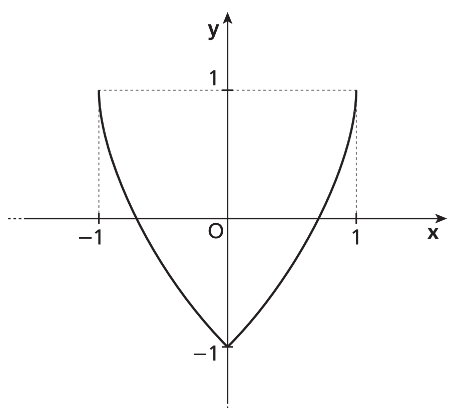


Figura 1

Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b. Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

c. La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

d. Verificare che la funzione $H(x) = \dfrac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano determinata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta» (*G. H. Hardy*)

QUESTIONARIO

1 É dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

2 Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p.
- Qual è la probabilità di ottonere testa esattamente 2 volte?
- Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

3 Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano $\pi : 3x - 2y + 5 = 0$.
- Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $P(4; 2; 1)$ sul piano π.
- Determinare l'intersezione della retta $s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π.

4 Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

5 Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:
- è tangente all'asse x nell'origine;
- passa per il punto $(1; 0)$;
- ha un punto stazionario in $(2; -2)$.

6 Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.

7 Il prossimo 5 luglio la Terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa $1{,}52 \cdot 10^{11}$ m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole.

8 Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi:* «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotèma di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva 60 millimetri».
Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possbile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

PROBLEMA 1

a. Per determinare il valore dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ imponiamo che la retta $t: 7x + y - 12 = 0$ sia tangente al grafico nel suo punto P di ascissa $x = 1$. Esprimiamo l'espressione di t in forma esplicita:

$$7x + y - 12 = 0 \to y = -7x + 12.$$

Determiniamo l'ordinata del punto P:

$$y_P = -7x_P + 12 \to y_P = -7 \cdot 1 + 12 \to y_P = 5.$$

Quindi, il punto P ha coordinate $P(1; 5)$.
Possiamo quindi imporre che la retta t sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ richiedendo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f'_{a,b}(1) = -7 \\ f_{a,b}(1) = 5 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata prima di $f_{a,b}(x)$:

$$f'_{a,b}(x) = \frac{3ax^2 \cdot x^2 - 2x(ax^3 + b)}{x^4} \to f'_{a,b}(x) = \frac{3ax^4 - 2ax^4 - 2bx}{x^4} \to f'_{a,b}(x) = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4}.$$

Poiché la funzione ha dominio $x \neq 0$, possiamo semplificare e ottenere:

$$f'_{a,b}(x) = \frac{ax^3 - 2b}{x^3}.$$

Possiamo quindi ricavare i valori dei parametri a e b.

$$\begin{cases} f'_{a,b}(1) = -7 \\ f_{a,b}(1) = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a - 2b = -7 \\ a + b = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a - 2b = -7 \\ a + b = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Quindi $a = 1$ e $b = 4$.

b. Il dominio naturale della funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ è $D = \mathbb{R} - \{0\}$: infatti, l'unico valore per cui $f(x)$ non ha significato è $x = 0$, che annulla il denominatore.

Poiché $f(-x) = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$, segue che $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$: pertanto, la funzione è né pari né dispari, e quindi il suo grafico non è simmetrico né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine.

Non ci sono punti di intersezione con l'asse y, poiché $x \neq 0$ per le condizioni sul dominio.
Per determinare i punti di intersezione con l'asse x, risolviamo l'equazione

$$f(x) = 0 \to x^3 + 4 = 0 \to x = -\sqrt[3]{4}.$$

Quindi il grafico interseca l'asse x solo nel punto $(-\sqrt[3]{4}; 0)$.

Per studiare il segno poniamo $f(x) > 0$, ovvero $\dfrac{x^3 + 4}{x^2} > 0$. Il denominatore è sempre positivo nel dominio, pertanto il segno della funzione è concorde con quello del numeratore: la funzione è quindi positiva per $x > -\sqrt[3]{4}$, (con $x \neq 0$) e negativa per $x < -\sqrt[3]{4}$.

Poiché f è continua in ogni intervallo del suo dominio, cerchiamo eventuali asintoti verticali calcolando il limite per x che tende a 0, che è l'unico punto di accumulazione di D non appartenente al dominio:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty.$$

Osserviamo che il limite destro e il limite sinistro coincidono, perché il denominatore è positivo sia per $x \to 0^-$, sia per $x \to 0^+$.
La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$.
La funzione non ammette invece asintoti orizzontali, in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty.$$

Determiniamo se esistono asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 1\cdot x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4}{x^2}\right] = 0.$$

La funzione ammette quindi asintoto obliquo destro e sinistro di equazione $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante).
Consideriamo ora la derivata di $f(x)$, ottenuta sostituendo $a = 1$ e $b = 4$ nell'espressione di $f'_{a,b}(x)$ già calcolata:

$$f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3}.$$

Osserviamo che il dominio di $f'(x)$ coincide con il dominio di $f(x)$, e quindi non ci sono punti in cui $f(x)$ non è derivabile: di conseguenza, non esistono punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale.
Per determinare gli intervalli di monotonia e i punti di estremo, studiamo il segno di $f'(x)$:

$\text{N} > 0$: $x^3 > 8 \to x > 2$,

$\text{D} > 0$: $x > 0$.

Quindi, otteniamo:

$f'(x) > 0 \to x < 0 \vee x > 2$;

$f'(x) < 0 \to 0 < x < 2$;

$f'(x) = 0 \to x = 2$.

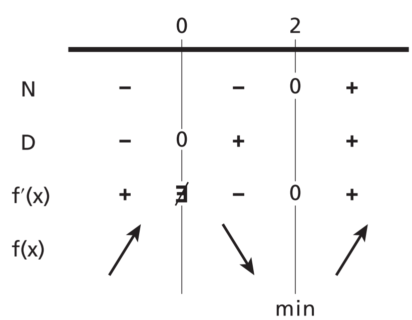


Figura 2

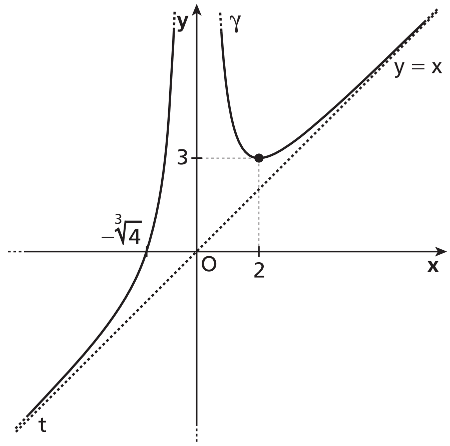
La funzione è crescente in $]-\infty; 0[$ e in $]2; +\infty[$, decrescente in $]0; 2[$. Ricordando che $x = 0$ non appartiene al dominio, l'unico punto di estremo relativo per $f(x)$ è quindi $x = 2$, che è un punto di minimo relativo. Poiché $f(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = 3$, le sue coordinate sono $(2; 3)$.

La funzione non ha punti di estremo assoluto, perchè è illimitata sia inferiormente, sia superiormente.

Per studiare la concavità e determinare gli eventuali punti di flesso, studiamo il segno $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{3x^2\cdot x^3 - (x^3-8)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}.$$

La derivata seconda è positiva in tutto il dominio.
Pertanto la funzione rivolge la concavità verso l'alto in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$. Non ci sono punti di flesso.
Il grafico γ è pertanto il seguente.



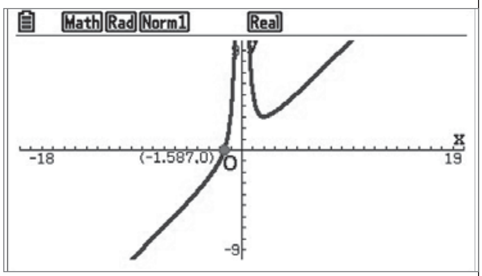
■ **Figura 3**

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per disegnare il grafico di $f(x)$ e studiarne alcune proprietà.

Per prima cosa inseriamo la definizione della funzione $Y1 = \frac{x^3+4}{x^2}$.

Dopo aver visualizzato la funzione con il comando *F6* [*DRAW*], utilizziamo il tasto *F5* [*G-SOLV*] per poi selezionare il comando *F4* [*Y-ICEPT*]. L'errore che compare ci segnala che la funzione non interseca l'asse *y*. Per trovare le intersezioni con l'asse *x*, usiamo il tasto *F5* [*G-SOLV*] per poi selezionare il comando *F1* [*ROOT*].



Per determinare l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P, che chiameremo s, consideriamo il fascio di rette per P:

$$F_p : y - 5 = m(x-1).$$

Chiamiamo $Q(x_0 : y_0)$ il punto di tangenza di F_p con la curva γ e diverso da P.

Impostiamo il sistema formato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} y_0 - 5 = m(x_0-1), \text{ per l'appartenenza di } Q \text{ alla retta del fascio} \\ y_0 = \dfrac{x_0^3+4}{x_0^2}, \text{ per l'appartenenza di } Q \text{ a } \gamma \\ m = \dfrac{x_0^3-8}{x_0^3}, \text{ perché il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata di } f(x) \\ \qquad\qquad \text{nell'ascissa del punto di tangenza.} \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli, nominando le due variabili, per semplicità di notazione, x e y:

$$\begin{cases} y = m(x-1)+5 \\ y = \dfrac{x^3+4}{x^2} \\ m = \dfrac{x^3-8}{x^3} \end{cases}.$$

Sostituendo le espressioni di y e m nella prima equazione, si ottiene:

$$\frac{x^3+4}{x^2} = \frac{x^3-8}{x^3}\cdot(x-1)+5 \to x^4+4x = x^4-x^3-8x+8+5x^3 \to x^3-3x+2=0,$$

con $x \neq 0$.

Poiché una delle soluzioni è $x = 1$, scomponiamo il polinomio con il metodo di Ruffini.

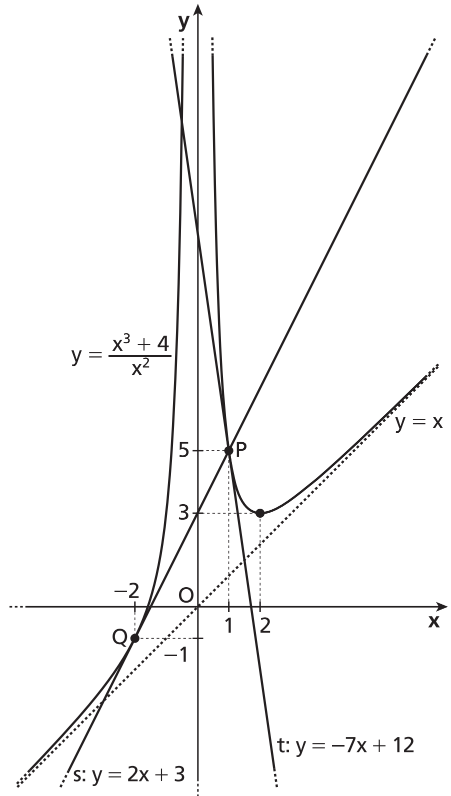
	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0

■ **Figura 4**

Otteniamo

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = -2$ e $x = 1$.
Osserviamo che la soluzione $x = 1$ corrisponde all'ascissa del punto P per cui si ottiene la retta tangente t già nota. Per $x = -2$, invece, si ottengono il punto di tangenza $Q(-2; -1)$ e la relativa retta s di equazione $y = 2x + 3$, tangente a γ in Q.



■ **Figura 5**

c. Osserviamo che l'equazione $y - 5 = m(x - 1)$ rappresenta il fascio di rette passanti per il punto P a meno della retta $x = 1$, parallela all'asse y.

Per risolvere il problema posto, consideriamo il sistema formato dall'equazione del fascio di rette e dall'espressione analitica della funzione $f(x)$:

$$\begin{cases} y - 5 = m(x-1) \\ y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} \end{cases}.$$

Otteniamo l'equazione risolvente:

$$m(x-1) + 5 = \frac{x^3 + 4}{x^2} \rightarrow mx^3 - mx^2 + 5x^2 = x^3 + 4 \rightarrow (m-1)x^3 + (5-m)x^2 - 4 = 0, \text{ con } x \neq 0.$$

Sappiamo che $x = 1$ è una soluzione, poiché il centro P del fascio appartiene anche al grafico di $f(x)$. Possiamo dunque affermare che esiste sempre almeno un'intersezione fra γ e il fascio e possiamo fattorizzare come segue, usando il metodo di Ruffini.

	m − 1	5 − m	0	−4
1		m − 1	4	4
	m − 1	4	4	0

■ **Figura 6**

L'equazione risolvente equivale a:

$$(x-1)[(m-1)x^2 + 4x + 4] = 0.$$

– Se $m = 1$, l'equazione diventa $(x - 1)(4x + 4) = 0$, che ammette due soluzioni distinte: $x = -1$ e $x = 1$. Osserviamo che la retta del fascio con coefficiente angolare $m = 1$ è parallela all'asintoto obliquo.
– Se $m \neq 1$, dobbiamo analizzare il segno del discriminante dell'equazione di secondo grado $(m - 1)\, x^2 + 4x + 4 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 4(m - 1) = 8 - 4m.$$

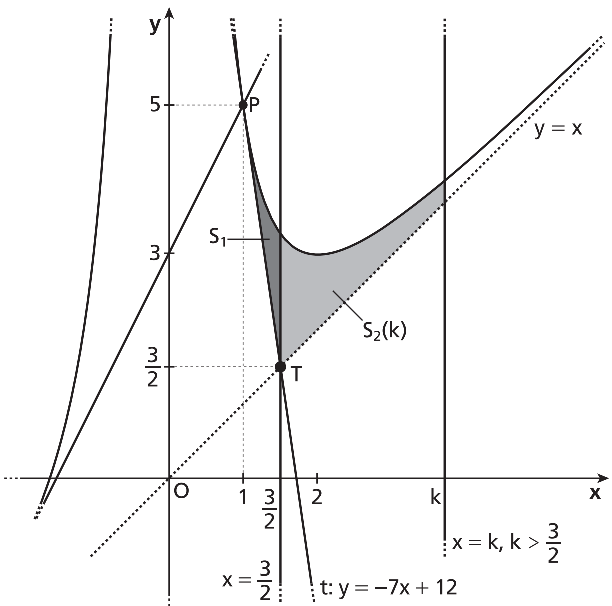
- Per $8 - 4m < 0$, ovvero per $m > 2$, l'equazione non ha soluzioni reali. In questo caso, l'unica intersezione della retta del fascio con γ è il punto P.
- Per $8 - 4m = 0$, ovvero per $m = 2$, l'equazione ha una soluzione reale doppia: $x = -2$. Notiamo che questa soluzione corrisponde alla retta tangente in Q determinata in precedenza. Tale retta tangente poteva quindi essere determinata anche seguendo il procedimento appena descritto in questa parte **c**.
- Per $8 - 4m > 0$, ovvero per $m < 2$, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Verifichiamo che una delle due soluzioni è $x = 1$ se e solo se $m = -7$, sostituendo 1 nell'equazione di secondo grado:

  $$m - 1 + 4 + 4 = 0 \to m = -7.$$

  Segue che, per $m = -7$, la soluzione $x = 1$ è una soluzione doppia dell'equazione risolvente.

In sintesi, le intersezioni tra la retta $y - 5 = m(x - 1)$ e γ sono:
- per $m = -7$, tre, di cui due coincidenti in $P(1; 5)$;
- per $m = 1$, due distinte;
- per $m = 2$, tre, di cui due coincidenti in $Q(-2; -1)$;
- per $m > 2$, un'intersezione costituita dal punto $P(1; 5)$;
- per $m < 2 \wedge m \neq -7 \wedge m \neq 1$, tre distinte.

d. Osserviamo che il punto di intersezione T tra la retta t e l'asintoto obliquo ha coordinate $T\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Possiamo dunque suddividere la regione in due zone, separate dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$, di area rispettivamente S_1 ed $S_2(k)$, tali che $S(k) = S_1 + S_2(k)$.



■ **Figura 7**

Dunque

$$S_1=\int_1^{\frac{3}{2}}[f(x)-(-7x+12)]\,dx=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^3+4}{x^2}+7x-12\right)dx=$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x+\frac{4}{x^2}+7x-12\right)dx=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(8x+\frac{4}{x^2}-12\right)dx=\left[4x^2-\frac{4}{x}-12x\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$S_2(k)=\int_{\frac{3}{2}}^{k}[f(x)-x]\,dx=\int_{\frac{3}{2}}^{k}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{k}\frac{4}{x^2}\,dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k}=-\frac{4}{k}+\frac{8}{3}.$$

Quindi $S(k)=S_1+S_2(k)=\frac{1}{3}-\frac{4}{k}+\frac{8}{3}=3-\frac{4}{k}$.

Il limite $\lim_{k\to+\infty}S(k)=\lim_{k\to+\infty}\left(3-\frac{4}{k}\right)=3$ rappresenta l'area della regione illimitata di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo e la retta t.

PROBLEMA 2

a. Studiamo la derivabilità della funzione in $x=0$. Distinguiamo tre casi:

1. n dispari;

2. n pari, $n>2$;

3. $n=2$.

1. Se n è dispari possiamo scrivere $\sqrt[n]{x^2}=x^{\frac{2}{n}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$f_n(x)=x^{\frac{2}{n}}-\sqrt{ax^2+bx+1}.$$

Calcoliamo ora la derivata per $x\neq 0$:

$$f_n'(x)=\frac{2}{n}\cdot x^{\frac{2}{n}-1}-\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\to f_n'(x)=\frac{2}{n}\cdot x^{\frac{2-n}{n}}-\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\to$$

$$f_n'(x)=\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}-\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x=0$ ($n\geq 3$, quindi $n-2>0$ e dispari):

$$f_{n-}'(0)=\lim_{x\to 0^-}\Big(\underbrace{\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}}_{\downarrow\ -\infty}-\underbrace{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}_{\downarrow\ \frac{b}{2}}\Big)=-\infty;$$

$$f_{n+}'(0)=\lim_{x\to 0^+}\Big(\underbrace{\frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}}_{\downarrow\ +\infty}-\underbrace{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}_{\downarrow\ \frac{b}{2}}\Big)=+\infty.$$

Deduciamo che per n dispari la funzione non è derivabile e presenta una cuspide in $x=0$.

2. Se n è pari e $n > 2$ la funzione $\sqrt[n]{x^2}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, è pari e si può scrivere nella forma $|x|^{\frac{2}{n}}$, cioè:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x \geq 0 \wedge x_2 \leq x \leq x_1 \\ (-x)^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x < 0 \wedge x_2 \leq x \leq x_1 \end{cases},$$

dove x_1 e x_2 sono le radici dell'equazione associata al radicando.
Calcoliamo la derivata per $x \neq 0$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \wedge x_2 < x < x_1 \\ -\dfrac{2}{n} \cdot (-x)^{\frac{2-n}{n}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0 \wedge x_2 < x < x_1 \end{cases} \to;$$

$$f_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \wedge x_2 < x < x_1 \\ -\dfrac{2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0 \wedge x_2 < x < x_1 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$ (anche in questo caso, $n > 3$, quindi $n - 2 > 0$ e pari):

$$f_{n^-}'(0) = \lim_{x \to 0^-}\left(\underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\dfrac{-2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{b}{2}}}{\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}\right) = -\infty;$$

$$f_{n^+}'(0) = \lim_{x \to 0^+}\left(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{b}{2}}}{\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}}\right) = +\infty.$$

Deduciamo che per n pari, $n > 2$, la funzione non è derivabile e presenta una cuspide in $x = 0$.

3. Se $n = 2$ la funzione diventa:

$$f_2(x) = \sqrt{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1} \to f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2+bx+1} \to$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x \geq 0 \wedge x_2 \leq x \leq x_1 \\ -x - \sqrt{ax^2+bx+1}, \text{ se } x < 0 \wedge x_2 \leq x \leq x_1 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata per $x \neq 0$:

$$f_2'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x > 0 \wedge x_2 < x < x_1 \\ -1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}, \text{ se } x < 0 \wedge x_2 < x < x_1 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e quella destra in $x = 0$:

$$f_{2^-}'(0) = \lim_{x \to 0^-}\left(-1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right) = -1 - \dfrac{b}{2},$$

$$f_{2^+}'(0) = \lim_{x \to 0^+}\left(1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right) = 1 - \dfrac{b}{2}.$$

Notiamo che, essendo $-1-\frac{b}{2} \neq 1-\frac{b}{2}, \forall b \in \mathbb{R}$, con $n=2$ la funzione non è derivabile e presenta un punto angoloso in $x=0$. Consideriamo

$$f_2(x)=|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}.$$

Il grafico deve essere simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, quindi $f_2(x)$ deve essere pari. Imponiamo la condizione di parità:

$$f_2(-x)=f_2(x), \forall x \in [-1;1] \rightarrow$$

$$|x|-\sqrt{ax^2-bx+1}=|x|-\sqrt{ax^2+bx+1} \rightarrow ax^2-bx+1=ax^2+bx+1 \rightarrow 2bx=0 \rightarrow b=0.$$

Quindi:

$$f_2(x)=|x|-\sqrt{ax^2+1}.$$

Consideriamo il dominio della funzione $f_2(x)$:

$$ax^2+1 \geq 0 \rightarrow -\sqrt{-\frac{1}{a}} \leq x \leq \sqrt{-\frac{1}{a}}.$$

Poiché il dominio deve essere $[-1;\ 1]$ dobbiamo imporre che $\sqrt{-\frac{1}{a}}=1$, quindi $-\frac{1}{a}=1 \rightarrow a=-1$.
Affinché il grafico di $f_2(x)$ sia α deve valere $b=0$, $a=-1$. D'ora in avanti $f_2(x)=|x|-\sqrt{1-x^2}$.

b. Consideriamo ora la funzione $g(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$ e studiamone le caratteristiche.

- Dominio della funzione $g(x)$: $1-x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Quindi, $D=[-1;\ 1]$.
- Parità della funzione: $g(-x)=g(x), \forall x \in D$. Quindi, la funzione $g(x)$ è pari.
- Segno della funzione $|x|+\sqrt{1-x^2}>0, \forall x \in D$.

Poiché il dominio è limitato, non sono presenti asintoti orizzontali od obliqui. Inoltre, la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1;\ 1]$; quindi per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo assoluti, perciò non sono presenti asintoti verticali.

Verifichiamo che la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=0$ e in $x=\pm 1$. Esprimiamo la funzione per casi e calcoliamone la derivata:

$$g(x)=\begin{cases} -x+\sqrt{1-x^2}, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ x+\sqrt{1-x^2}, \text{ se } 0<x \leq 1 \end{cases};$$

$$g'(x)=\begin{cases} -1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } -1<x<0 \\ 1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ se } 0<x<1 \end{cases}.$$

Calcoliamo le derivate destra e sinistra di $g(x)$ per x che tende a 0:

$$\lim_{x \to 0^-} g'(x)=-1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} g'(x)=1.$$

Le derivate destra e sinistra non coincidono, quindi la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=0$, che è un punto angoloso per la funzione.

Calcoliamo la derivata destra $g(x)$ per x che tende a -1 e la derivata sinistra $g(x)$ per x che tende a 1:

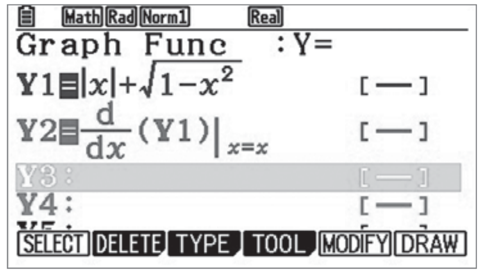
$$\lim_{x \to -1^+} g'(x)=+\infty; \qquad \lim_{x \to 1^-} g'(x)=-\infty.$$

Quindi, la funzione non è derivabile nei due estremi del dominio $x=\pm 1$, che sono punti di flesso e tangente verticale.

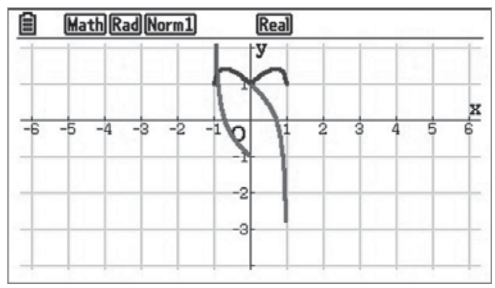
Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per disegnare il grafico β.
Definiamo la funzione $Y1 = |x| + \sqrt{1-x^2}$ scegliendo la funzione valore assoluto Abs dal catalogo richiamabile con la combinazione di tasti *SHIFT* + *4* [*CATALOG*].

Dopo aver visualizzato la funzione con il comando *F6* (*DRAW*), possiamo notare che il dominio è l'intervallo $[-1; 1]$ e che la funzione è positiva e pari. Per trovare i punti di non derivabilità, tracciamo anche la funzione derivata. Perciò, torniamo all'ambiente di definizione delle funzioni con il tasto *F6* e inseriamo la definizione della funzione derivata $Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)\big|_{x=x}$ usando la sequenza di tasti *OPTN*, *F2* [*CALC*], *F1* [d/dx] per inserire il simbolo di derivata e il tasto *F1* [*Y*] per inserire correttamente il riferimento alla funzione *Y1*.



Visualizziamo la funzione derivata con il comando *F6* (*DRAW*) e notiamo che la derivata è discontinua in $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.



Per verificare ulteriormente che la derivata non è definita in questi punti, usiamo l'ambiente *Table* per visualizzare la tabella dei valori di *Y2*. Nota che nell'ambiente *Table* compaiono già tutte le funzioni definite nell'ambiente *Graph*.
Accediamo alle impostazioni della tabella tramite il comando *F5* [*SET*] e impostiamo il primo valore a -1, l'ultimo valore a 1 e la dimensione del passo a 0.1. Visualizziamo la tabella di *Y1* e *Y2* con il comando *F6* [*TABLE*] e osserviamo che in corrispondenza di $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ nella colona di *Y2* compare la dicitura *ERROR* a indicare che il valore non è definito.

Pertanto, la derivata $g'(x)$ è definita in $D' = D - \{\pm 1, 0\}$. Per la parità di $g(x)$, possiamo limitarci a studiare in segno di $g'(x)$ nell'intervallo $]0; 1[$:

$$1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \to \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

Nell'intervallo $]0; 1[$ il denominatore è sempre positivo, quindi studiare il segno di $g'(x)$ si riduce a risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{1-x^2} > x$, con $x > 0$.

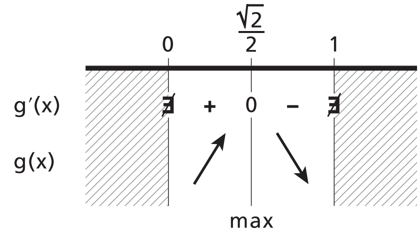
Quindi:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} > x \\ x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1-x^2 > x^2 \\ x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x > 0 \end{cases}.$$

Quindi $g'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Perciò, la funzione $g(x)$ è monotòna crescente nell'intervallo $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, mentre è monotòna decrescente nell'intervallo $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$.

Disegniamo il quadro dei segni per la derivata $g'(x)$ nell'intervallo $]0; 1[$.
Osserviamo che poiché $g(x)$ è continua in $x = 1$, questo è un punto di minimo. Data la parità della funzione anche $x = -1$ è punto di minimo. La funzione vale $g(1) = g(-1) = 1$.



■ **Figura 8**

Inoltre, poiché la funzione è continua e pari, anche $x = 0$ è punto di minimo e $g(0) = 1$.

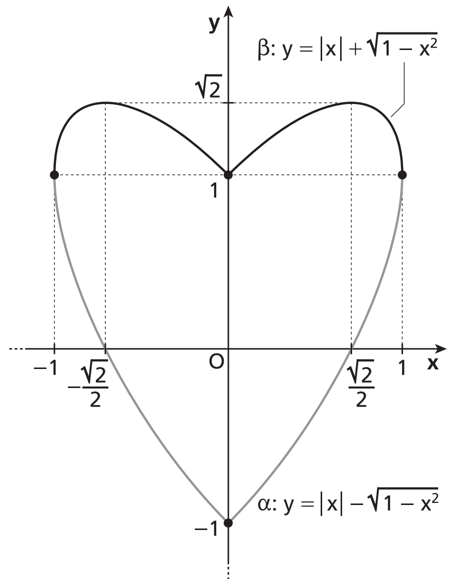
Calcoliamo ora il valore del massimo corrispondente al punto di massimo $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Studiamo ora la concavità della funzione $g(x)$.

In $D' = D - \{\pm 1, 0\}$ calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Osserviamo che $g''(x) < 0\ \forall x \in D'$, quindi la funzione è concava.
Indichiamo con β il grafico di $g(x)$ e tracciamo la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$, ricordando che $g(x)$ è pari.



■ **Figura 9**

c. Supponiamo che il punto P appartenga a β e il punto Q appartenga ad α, quindi $y_P > y_Q$.
Possiamo quindi scrivere le coordinate dei punti come segue:

$$P\left(k; |k| + \sqrt{1-k^2}\right), \qquad Q\left(k; |k| - \sqrt{1-k^2}\right),$$

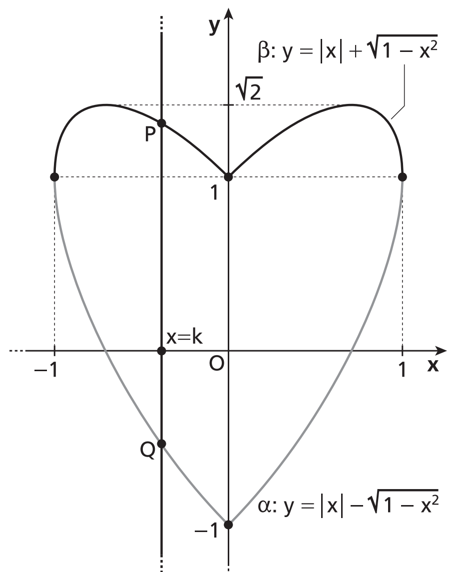
con $-1 < k < 1$.

Calcoliamo la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ che dipende da k, con $-1 < k < 1$:

$$l(k) = \overline{PQ} = |y_P - y_Q| = g(k) - f_2(k) =$$

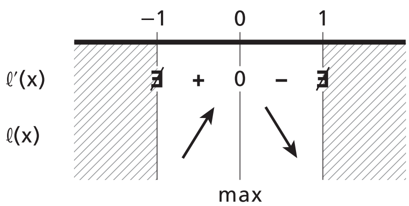
$$|k| + \sqrt{1-k^2} - |k| + \sqrt{-k^2+1} = 2\sqrt{1-k^2}.$$

La funzione $l(k)$ ha un punto di massimo in $k = 0$, infatti $l'(k) = -\frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}$ che si annulla in $k = 0$. Disegniamo il quadro dei segni.



■ **Figura 10**

Questo vuol dire che $\overline{PQ}$ è massimo se la retta r ha equazione $x = 0$, cioè se coincide con l'asse y che è l'asse di simmetria di γ in quanto $g(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni pari.



■ **Figura 11**

d. Per verificare che $H(x)$ è una primitiva di $h(x)$ basta dimostrare che $H'(x) = h(x)$. Calcoliamo $H'(x)$:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right) \rightarrow$$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\frac{1+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow H'(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow H'(x) = \sqrt{1-x^2} = h(x).$$

Per calcolare l'area A_γ usiamo il calcolo integrale:

$$A_\gamma = \int_{-1}^{1}\left|g(x) - f_2(x)\right|dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Poiché la funzione integranda è pari, possiamo riscrivere l'integrale come:

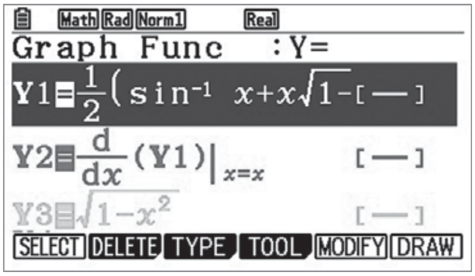
$$A_\gamma = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 h(x)dx = 4[H(x)]_0^1 = 4[H(1) - H(0)] =$$

$$4\left[\frac{1}{2}(\arcsin 1 + 0) - 0\right] = 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Con la calcolatrice grafica

Per mostrare che $H' = h(x)$, tracciamo il grafico di entrambe le funzioni nell'ambiente *Graph* e verifichiamo che i grafici coincidono.

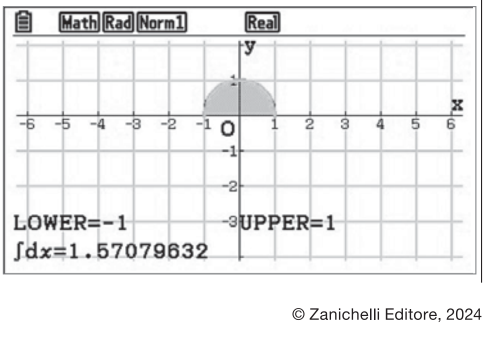
Definiamo H come $Y1 = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2})$ e poi la funzione derivata $Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x}$ usando la sequenza di tasti *OPTN*, *F2* [*CALC*], *F1* [d/dx] per inserire il simbolo di derivata e il tasto *F1* [Y] per inserire correttamente il riferimento alla funzione *Y1*. Infine definiamo h come $Y3 = \sqrt{1-x^2}$.



Prima di tracciare i grafici, selezioniamo la funzione *Y1* e nascondiamola con il comando *F1* [*SELECT*] poiché non è coinvolta nel confronto. Visualizziamo le funzioni con il comando *F6* [*DRAW*] e osserviamo che coincidono come atteso.

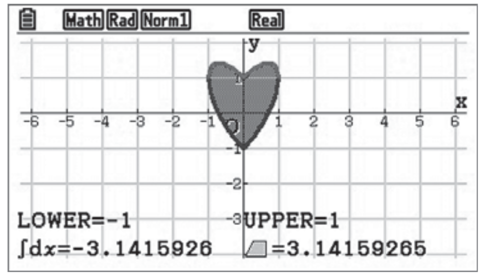
Come già notato, l'area richiesta si può ottenere utilizzando la formula $A_\gamma = 2\int_{-1}^{1} h(x)dx$.

Dall'ambiente *Graph* possiamo fare il calcolo dell'integrale di *Y3* tra −1 e 1 con la sequenza di comandi *F5* [*G-SOLV*], *F6* [▷], *F3* [$\int$dx], *F1* [$\int$dx], ▼, *EXE*, −1. *EXE*, 1, *EXE*.



In realtà, usando la calcolatrice grafica, non è necessario ricorrere alla funzione h per trovare l'area richiesta. È sufficiente definire le funzioni $Y1 = |x| - \sqrt{1-x^2}$ e $Y2 = |x| + \sqrt{1-x^2}$ per tracciare rispettivamente le curve α e β e visualizzarle con il comando *F6* [*DRAW*].

A questo punto è possibile calcolare direttamente l'area compresa tra le due curve con la sequenza di comandi *F5* [*G-SOLV*], *F6* [▷], *F3* [$\int$dx], *F3* [*INTSECT*], *EXE*, ►, *EXE*.

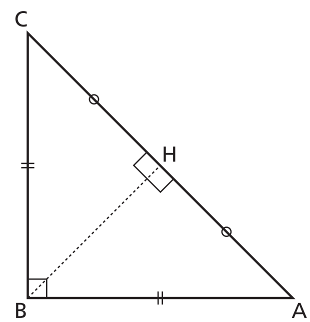


QUESTIONARIO

1 Consideriamo un triangolo ABC, rettangolo in B.
Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione, quindi consideriamo due casi.

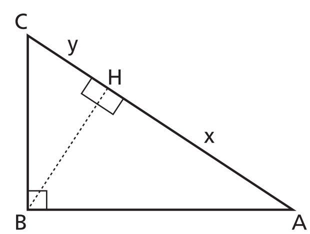
1. Dimostriamo che, se ABC è isoscele, allora BH è congruente a metà dell'ipotenusa.

   Se ABC è isoscele, allora i cateti BC e BA sono congruenti; in questo caso, l'altezza BH relativa all'ipotenusa risulta anche mediana relativa all'ipotenusa.
   Sappiamo inoltre che, in un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa, quindi $BH \cong \frac{1}{2}AC$.



■ **Figura 12**

2. Viceversa, supponiamo che nel triangolo ABC, rettangolo in B, l'altezza BH relativa all'ipotenusa sia congruente a metà ipotenusa: $BH \cong \frac{1}{2}AC$. Vogliamo dimostrare che tale triangolo è isoscele.



■ **Figura 13**

Proponiamo due metodi alternativi, entrambi validi.

Alternativa 1.

Poniamo $\overline{AH} = x$ e $\overline{HC} = y$, con $x, y > 0$.

Allora, poiché $\overline{BH} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AH}+\overline{HC}}{2} = \frac{x+y}{2}$ per l'ipotesi fatta e $\overline{BH}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HC} = x\cdot y$ per il secondo teorema di Euclide, si ha:

$$\frac{(x+y)^2}{4} = x\cdot y \;\rightarrow\; x^2+y^2+2xy = 4xy \;\rightarrow\; (x-y)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = y \;\rightarrow\; \overline{AH} = \overline{HC} = \overline{BH}.$$

Segue che i triangoli ABH e CBH sono triangoli rettangoli isosceli. In particolare, $B\hat{C}A \cong C\hat{A}B \cong \frac{\pi}{4}$ e il triangolo ABC è dunque isoscele su base AC.

Alternativa 2.

Supponiamo per assurdo che ABC non sia isoscele. Allora l'altezza BH non coincide con la mediana BM relativa all'ipotenusa.
Come già ricordato, in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa, quindi vale anche $BM \cong \frac{1}{2}AC$.

Nel triangolo BHM, non degenere poiché M e H sono punti distinti, i lati BH e BM sono congruenti perché entrambi congruenti a metà ipotenusa.

Questo però è assurdo, perché il triangolo rettangolo BHM ha un cateto e l'ipotenusa tra loro congruenti: questo contraddice il teorema di Pitagora, in quanto si avrebbe $\overline{BM}^2 = \overline{BH}^2$ (e non $\overline{BM}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{MH}^2$).

Quindi, il triangolo ABC è isoscele.

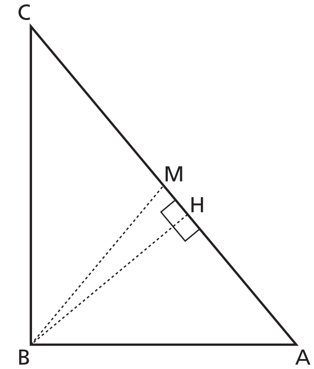


Figura 14

Abbiamo dunque dimostrato che un triangolo rettangolo è isoscele se e solo se l'altezza relativa all'ipotenusa è congruente a metà dell'ipotenusa.

2 – È noto dal *problema delle prove ripetute* che, dato un evento aleatorio con probabilità p di verificarsi, la probabilità che esso si verifichi esattamente k volte su n tentativi è data da:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dunque, la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte su 5 lanci vale:

$$p_2 = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3.$$

– Vogliamo determinare p affinché la funzione $p_2(p) = 10p^2(1-p)^3$ sia massima. Per fare questo, deriviamo rispetto a p e otteniamo:

$$p_2'(p) = 10[2p(1-p)^3 + p^2\cdot 3\cdot(1-p)^2\cdot(-1)] = 10[2p(1-p)^3 - 3p^2(1-p)^2] =$$
$$10p(1-p)^2[2(1-p)-3p] = 10p(1-p)^2(2-5p).$$

Studiamo il segno di questa derivata, considerando che, essendo p una probabilità, si avrà $0 \leq p \leq 1$.

- $10 \geq 0 \forall p \in [0;1]$
- $p \geq 0 \forall p \in [0;1]$
- $(1-p)^2 \geq 0 \forall p \in [0;1]$
- $2-5p \geq 0 \;\longleftrightarrow\; p \leq \frac{2}{5}$.

Dunque, si ottiene il seguente quadro dei segni.

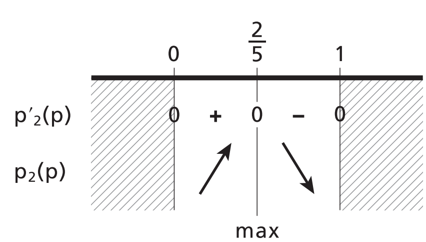
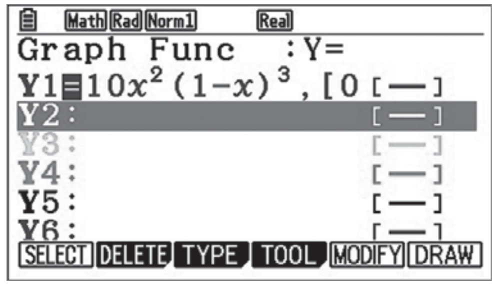


Figura 15

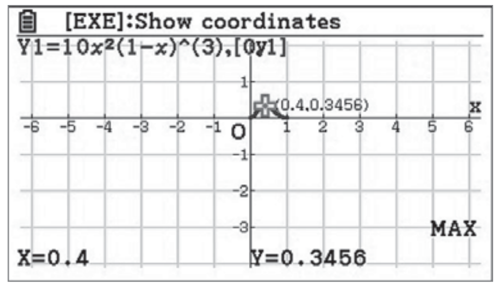
Pertanto, $p_2(p)$ è massima se $p = \frac{2}{5}$.

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per trovare il massimo di p_2 in funzione di p.
Definiamo la funzione da massimizzare $Y1 = 10x^2\,(1-x)^3$, $[0,1]$, con x compreso tra 0 e 1.



Usiamo il comando *F6* per visualizzare la funzione e troviamo il massimo con la sequenza di tasti *F5* [*G-SOLV*], *F2* [*MAX*]. Osserva che il massimo di $p_2(p)$ (cioè il massimo di $Y2(x)$) si ottiene per $p = 0.4 = \frac{2}{5}$.



3 – Per determinare le coordinate del punto H, scriviamo l'equazione della retta r passante per P e perpendicolare al piano π, per poi intersecarla con il piano stesso.

Poiché la retta r è perpendicolare al piano π, prendiamo come vettore direzione di r il vettore $(3; -2; 0)$, che si ottiene dai coefficienti di x, y, z nell'equazione del piano.

Poiché la retta r passa per il punto $P(4; 2; 1)$, la sua equazione parametrica è:

$$r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - 2t. \\ z = 1 \end{cases}$$

Intersechiamo ora la retta r con il piano π:

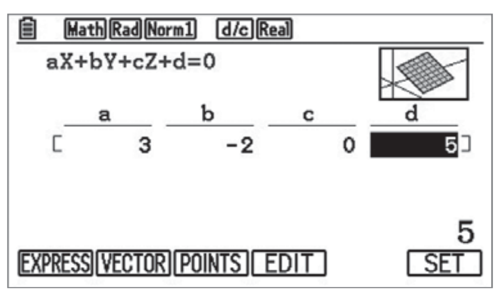
$$3(4+3t) - 2(2-2t) + 5 = 0 \rightarrow 12 + 9t - 4 + 4t + 5 = 0 \rightarrow 13t = -13 \rightarrow t = -1.$$

Dunque, sostituendo $t = -1$ nell'equazione della retta, otteniamo le coordinate del punto H: $H(1; 4; 1)$.

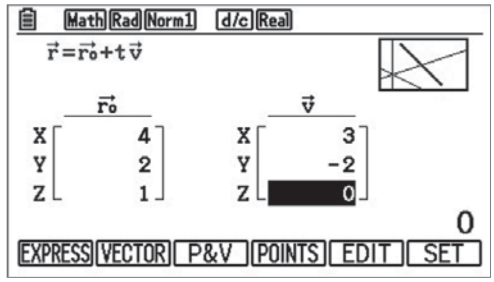
Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *3D Graph* per disegnare il piano e la retta del quesito e trovare il punto richiesto.

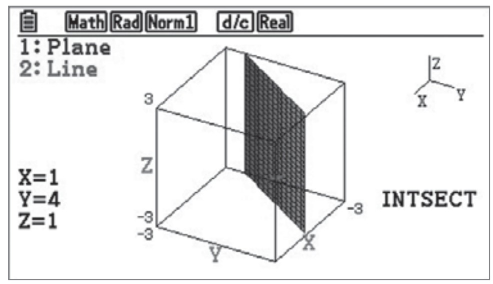
Disegniamo il piano π usando il comando *F3* [*TYPE*] e scegliendo il template del piano.
Inseriamo i coefficienti del piano e confermiamo con *F6* [*SET*]



Tracciamo la retta r ortogonale al piano π passante per P. Ripetiamo il comando *F3* [*TYPE*] ma selezioniamo il template della linea. Con il tasto *F2* [*VECTOR*] descriviamo la retta come un suo punto e il vettore di direzione. Inseriamo le coordinate del punto P nella definizione del vettore r_0 e i coefficienti di x, y, z nell'equazione del piano nella definizione del vettore $\vec{v}$.
Al termine dell'inserimento di tutti i coefficienti, confermiamo con il comando *F6* [*SET*].



A questo punto il comando *F6* (*DRAW*) permette di visualizzare il piano e la retta.
Calcoliamo il punto di intersezione con la sequenza di tasti *F5* [*G-SOLV*] e *F2* [*INTSECT*].
Le coordinate del punto H sono quindi (1; 4; 1).



Con il comando *F6* torniamo alla schermata di definizione dei grafici ed eliminiamo la retta r con il comando *F2* [*DELETE*].

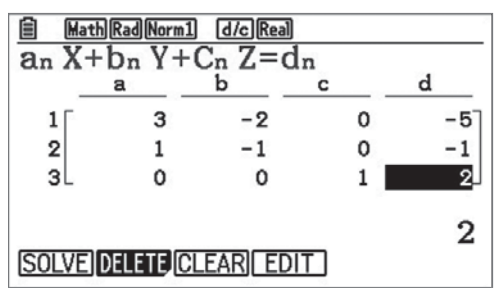
L'intersezione è data dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ x=y-1 \\ z=2 \end{cases} \to \begin{cases} 3(y-1)-2y+5=0 \\ x=y-1 \\ z=2 \end{cases} \to \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

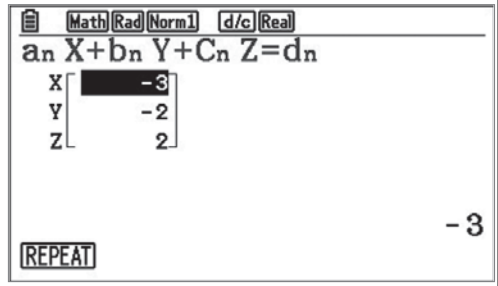
Dunque, il piano π e la retta s si intersecano in un punto di coordinate $(-3; -2; 2)$.

Con la calcolatrice grafica

Per trovare l'intersezione tra il piano e la retta s è sufficiente risolvere il sistema lineare associato tramite l'ambiente *Equation*. Selezioniamo il tipo con *F1* [*SIMUL*] e poi il numero di incognite con *F2* [*3*]. A questo punto portiamo le equazioni nella forma $aX + bY + cZ = d$ e inseriamo nella matrice i coefficienti relativi rispettivamente alle incognite X, Y, Z e i termini noti.



Terminato l'inserimento di tutti i coefficienti, usiamo il comando *F1* [*SOLVE*] e otteniamo le coordinate del punto di intersezione cercato.



4 Proponiamo due possibili metodi.

Metodo analitico

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + x - \cos x$, che ha dominio $\mathbb{R}$. La derivata è $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x$.
Poiché $-1 \leq \sin x \leq 1$, abbiamo

$$3x^2 \leq f'(x) \leq 3x^2 + 2,$$

quindi la derivata è sempre positiva, tranne eventualmente in $x = 0$. Tuttavia, in $x = 0$ otteniamo

$$f'(0) = 1 > 0,$$

quindi $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, cioè la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in tutto il suo dominio. Inoltre:

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2} > 0,$$

quindi, per il teorema degli zeri, sappiamo che esiste uno zero $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ della funzione $f(x)$. Inoltre, poiché la funzione è crescente, tale zero è unico. Ciò significa che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ha una sola soluzione, e questa è positiva.

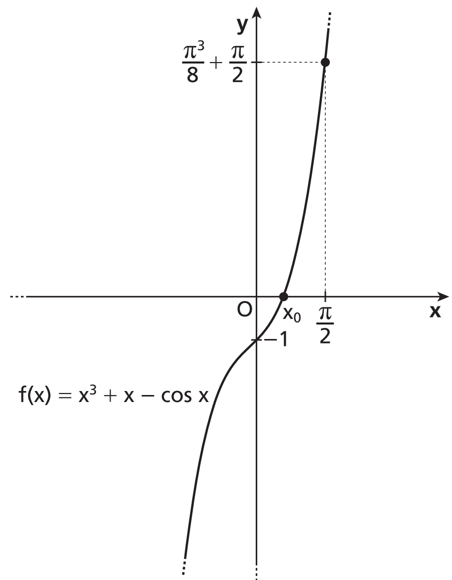


Figura 16

Metodo grafico

Scriviamo l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ nella forma $x^3 + x = \cos x$ e cerchiamo le sue soluzioni con il metodo grafico.
Consideriamo le funzioni $f(x) = x^3 + x$ e $g(x) = \cos x$, entrambe continue e derivabili in $\mathbb{R}$.
Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ g(x) = \cos x \end{cases}.$$

Calcoliamo $f'(x) = 3x^2 + 1$ e notiamo che $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
Osserviamo inoltre che la funzione $g(x)$ ha immagine $[-1; 1]$.

Consideriamo il caso $x \leq 0$. Poiché $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi}{2} < -1$ e $f(0) = 0$, possiamo concludere che:

- per $x \in \left]-\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) < -1 < g(x)$;
- per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $f(x) \leq 0 < g(x)$.

Dunque, per $x \leq 0$ non ci sono intersezioni tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Consideriamo ora il caso $x > 0$. Poiché $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2} > 1$, abbiamo che:

- per $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ è crescente e varia tra 0 e $\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$, mentre $g(x)$ è decrescente e varia tra 1 e 0; esiste quindi un unico numero reale $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tale che $f(x) = g(x)$, cioè x_0 è soluzione dell'equazione;
- per $x \in \left]\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$, $f(x) > 1 > g(x)$, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Concludiamo quindi che l'equazione ha un'unica soluzione x_0 e che tale soluzione è positiva, in quanto compresa nell'intervallo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

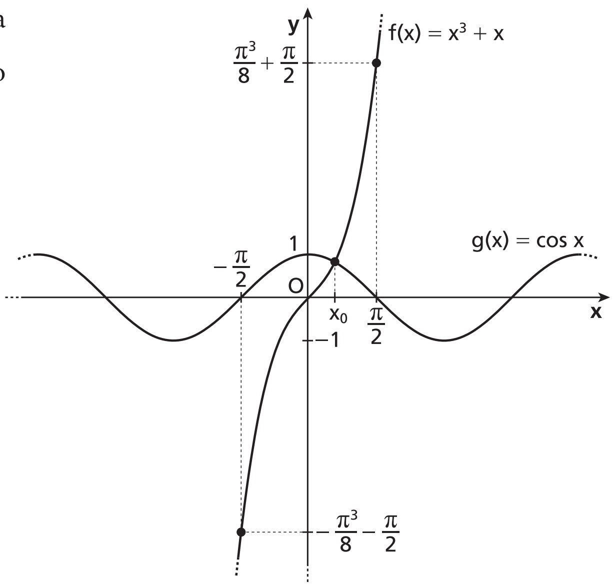
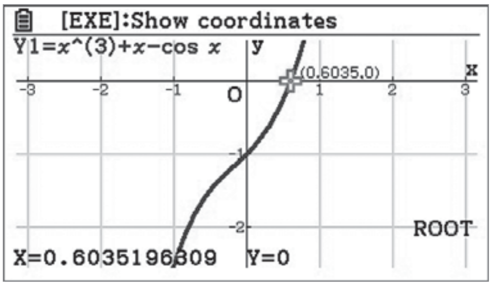


Figura 17

Con la calcolatrice grafica

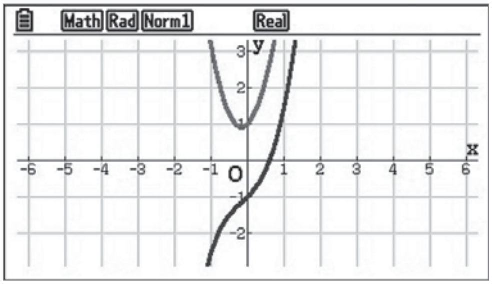
Usiamo l'ambiente *Graph* per trovare le radici di $x^3 + x - \cos x$.

Per prima cosa inseriamo la definizione della funzione $Y1 = x^3 + x - \cos x$.
Dopo aver visualizzato la funzione con il comando *F6* [*DRAW*], calcoliamo le intersezioni con l'asse x con il comando *F5* [*G-SOLV*] seguito dal comando *F1* [*ROOT*].
La radice trovata è $x \simeq 0.603520$, che è positiva. Si può verificare che l'intersezione con l'asse x è unica provando a cambiare intersezione con i tasti (▷) o (◁).



Per dimostrare che l'intersezione è unica, studiamo il segno della funzione derivata.

Torniamo all'ambiente di definizione delle funzioni con il tasto *F6* e inseriamo la definizione della funzione derivata $Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x}$ utilizzando la sequenza di tasti *OPTN*, *F2* [*CALC*], *F1* [d/dx] per inserire il simbolo di derivata e il tasto *F1* [*Y*] per inserire correttamente il riferimento della funzione *Y1*.



Visualizziamo, infine, la funzione derivata con il comando *F6* [*DRAW*] e notiamo che la derivata è sempre positiva. Deduciamo che la funzione *Y1* è strettamente crescente, quindi la radice trovata è unica.

5 Poiché $p(x)$ è un polinomio di quarto grado, la legge della funzione è

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k,$$

dove a, b, c, d e k sono opportune costanti reali da determinare.
Analizziamo le tre condizioni fornite dal testo.

1. Il grafico della funzione è tangente all'asse x nell'origine. Questo significa che:
   - il grafico passa per l'origine, ovvero $p(0) = 0$;
   - il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nell'origine, $p'(0)$, deve coincidere con la pendenza dell'asse x, che è 0: quindi $p'(0) = 0$.
2. Il grafico della funzione passa per il punto (1; 0), quindi $p(1) = 0$.
3. Il grafico della funzione ha un punto stazionario in (2; −2), quindi:
   - il grafico passa per (2; −2), ovvero $p(2) = -2$;
   - per definizione di punto stazionario, la derivata di $p(x)$ in $x = 2$ è nulla, ovvero $p'(2) = 0$.

Mettiamo a sistema le cinque relazioni che abbiamo trovato:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = -2 \\ p'(2) = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo le cinque condizioni nelle espressioni $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ e $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, si ottiene:

$$\begin{cases} a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + k = 0 \\ 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + k = 0 \\ a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + k = -2 \\ 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d + k = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + k = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases}.$$

Per risolvere il sistema costituito dalle ultime tre equazioni si può ricavare c in funzione di a e b nella terza equazione, e sostituirla nelle ultime due:

$$\begin{cases} c = -a - b \\ 16a + 8b + 4(-a - b) = -2 \\ 32a + 12b + 4(-a - b) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ 6a + 2b = -1 \\ 7a + 2b = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla terza si ottiene $a = 1$, che permette di determinare anche i valori di b e c:

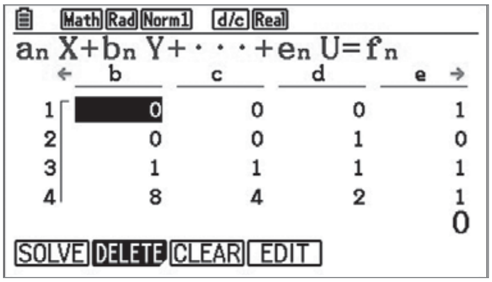
$$\begin{cases} c = -a - b \\ a = 1 \\ 7a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \frac{5}{2} \\ a = 1 \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}.$$

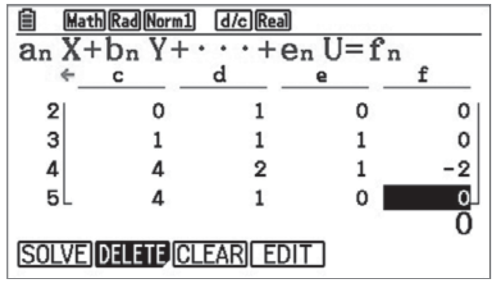
I coefficienti cercati sono quindi:

$$a = 1, \quad b = -\frac{7}{2}, \quad c = \frac{5}{2}, \quad d = 0, \quad k = 0.$$

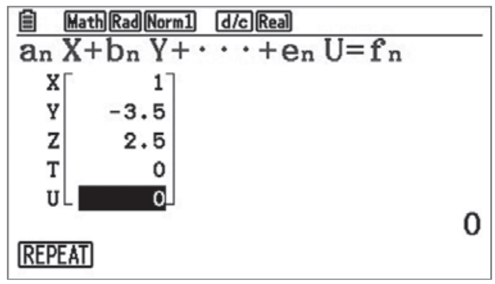
Con la calcolatrice grafica

Per risolvere il sistema lineare usiamo l'ambiente *Equation*. Selezioniamo il tipo con *F1* [*SIMUL*] e poi il numero di incognite con *F4* [*5*]. A questo punto portiamo le equazioni nella forma $aX + bY + cZ + dT + eU = f$ e inseriamo nella matrice i coefficienti relativi rispettivamente alle incognite X, Y, Z, T, U e i termini noti.





Terminato l'inserimento di tutti i coefficienti, usiamo il comando *F1* [*SOLVE*] e otteniamo il risultato.



La funzione richiesta è pertanto

$$y = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2.$$

6 Determiniamo l'espressione analitica di $F(x)$, considerando l'integrale indefinito associato $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$.

Poiché $\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$, l'integrale si presenta nella forma $-\int \cos(g(t)) \cdot g'(t)dt$, con $g(t) = \frac{1}{t}$. Dunque:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt = \int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + c.$$

Pertanto:

$$F(x) = \left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right).$$

La condizione $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ si traduce nell'equazione:

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2},$$

da cui, poiché $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, otteniamo $\sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$.

Si tratta di un'equazione goniometrica elementare nell'incognita a. Le soluzioni sono quindi:

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ \frac{1}{a} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \rightarrow \ \frac{1}{a} = \frac{\pi + 12k\pi}{6} \ \vee \ \frac{1}{a} = \frac{5\pi + 12k\pi}{6} \ \rightarrow$$

$$a = \frac{6}{\pi + 12k\pi} \ \vee \ a = \frac{6}{5\pi + 12k\pi}.$$

Notiamo che, essendo $a > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, dovrà essere $k \geq 0$, altrimenti si otterrebbe un valore di a negativo.

Osserviamo che $x \geq a$, pertanto dovrà anche essere $\frac{2}{\pi} \geq a$. Per la prima delle due espressioni si ottiene:

$$\frac{6}{\pi(1+12k)} \leq \frac{2}{\pi} \rightarrow 2+24k \geq 6 \rightarrow k \geq \frac{1}{6} \rightarrow k \geq 1, \text{ essendo } k \in \mathbb{Z}.$$

Per la seconda:

$$\frac{6}{\pi(5+12k)} \leq \frac{2}{\pi} \rightarrow 10+24k \geq 6 \rightarrow k \geq -\frac{1}{6} \rightarrow k \geq 0, \text{ essendo } k \in \mathbb{Z}.$$

Consideriamo infine che una frazione positiva, con il numero fissato, assume il valore massimo quando il denominatore è minimo. Pertanto, possiamo valutare la prima espressione in $k = 1$, ottenendo $a = \frac{6}{13\pi}$, e la seconda in $k = 0$, ottenendo $a = \frac{6}{5\pi}$.

Poiché $\frac{6}{5\pi} > \frac{6}{13\pi}$, concludiamo che il più grande valore di a per il quale $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ è $a = \frac{6}{5\pi}$.

Con la calcolatrice grafica

Usiamo l'ambiente *Graph* per disegnare il grafico di $F\left(\frac{2}{\pi}\right)$ al variare di a e risolvere l'equazione.

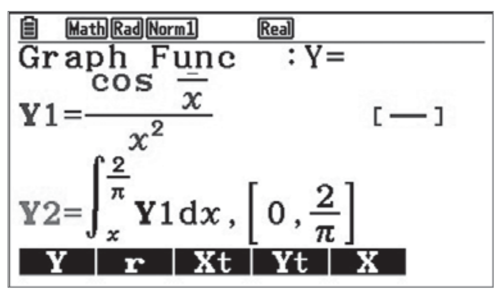
Per prima cosa inseriamo la definizione della funzione integranda $Y1 = \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

Poi definiamo la funzione $F\left(\frac{2}{\pi}\right)$ usando come incognita il parametro a. Per ridurre il numero di calcoli ed evitare il time out della calcolatrice, restringiamo il dominio di a all'intervallo $\left[0; \frac{2}{\pi}\right]$. Possiamo farlo perché se esiste a nell'intervallo $\left[0; \frac{2}{\pi}\right]$ tale che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$, allora il più grande valore di a tale che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$ appartiene all'intervallo poiché per ipotesi $a \leq \frac{2}{\pi}$.

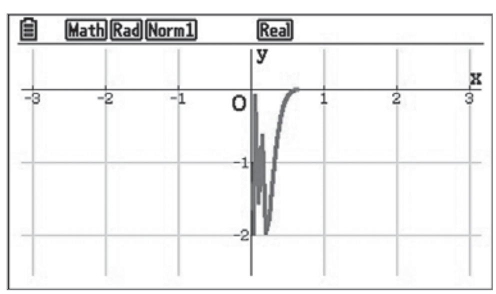
Inseriamo la definizione della funzione

$$Y2 = \int_x^{\frac{2}{\pi}} Y1dx, \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$$

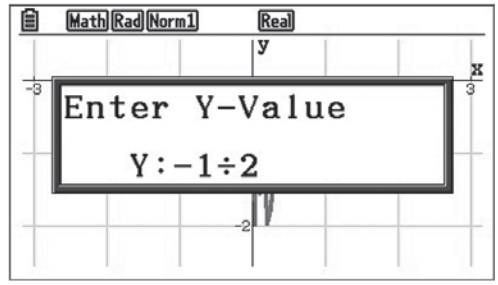
usando la sequenza di tasti *OPTN*, *F2* [*CALC*], *F3* [$\int dx$] per inserire il simbolo di integrale e il tasto *F1* [*Y*] per inserire correttamente il riferimento alla funzione integranda *Y1*. Prima di visualizzare la funzione *Y2*, nascondiamo la funzione *Y1* selezionandola e usando il comando *F1* [*SELECT*].



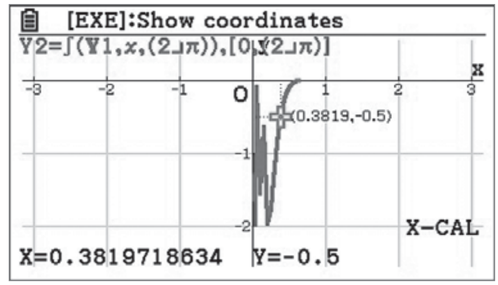
A questo punto usiamo il comando *F6* [*DRAW*] e aspettiamo che la funzione venga visualizzata. Notiamo visivamente che nell'intervallo scelto ci sono valori di a tale che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$, quindi possiamo continuare nella risoluzione del quesito.



Procediamo a risolvere l'equazione usando la sequenza di tasti *F5* [*G-SOLV*], *F6* [▷], *F2* [*X-CAL*] e inserendo il valore dell'ordinata $-\frac{1}{2}$.



Dopo aver premuto *EXE*, la calcolatrice troverà il valore di a più piccolo nell'intervallo $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ che soddisfa l'equazione e lo mostrerà come ascissa del punto selezionato. Premiamo ripetutamente la freccetta ▷ per trovare tutti i valori che soddisfano l'equazione fino ad arrivare al più grande. Il valore più grande viene raggiunto quando la freccetta ▷ non provoca più alcuna variazione nel punto selezionato.



Il valore di a trovato è $a = 0.3819718634$ che corrisponde a $a = \frac{6}{5\pi}$.

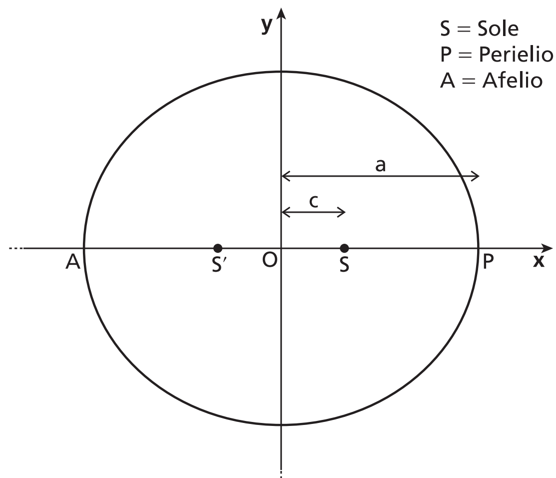
7 La prima legge di Keplero afferma che l'orbita dei pianeti è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi. In un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo un'ellisse con centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse x: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Cerchiamo i valori di a, b per i quali l'ellisse coincide con l'orbita della Terra.
Supponiamo che il Sole occupi il fuoco S di coordinate $(c; 0)$. Di conseguenza, l'afelio dell'orbita è il vertice A di coordinate $(-a; 0)$ e il perielio è il vertice P di coordinate $(a; 0)$.

Se come unità di misura scegliamo un segmento di lunghezza 10^{11} m, i dati del problema sono:

$$\overline{AS} = 1{,}52, \quad \overline{SP} = 1{,}47.$$

Inoltre, poiché il fuoco S' non occupato dal Sole ha coordinate $(-c; 0)$, vale la relazione $\overline{AS'} = \overline{SP}$.
Quindi:



■ **Figura 18**

$$2a = \overline{AS} + \overline{SP} = 2{,}99; \qquad 2c = \overline{AS} - \overline{AS'} = \overline{AS} - \overline{SP} = 0{,}05.$$

Ricaviamo i valori di a^2 e b^2, tenendo conto delle cifre significative:

$$a^2 = \left(\frac{2{,}99}{2}\right)^2 = 2{,}24; \qquad b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{2{,}99}{2}\right)^2 - \left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 = 2{,}23.$$

Nel sistema di riferimento che abbiamo fissato, la traiettoria della Terra ha equazione

$$\frac{x^2}{2{,}24} + \frac{y^2}{2{,}23} = 1$$

che si può riscrivere anche come $2{,}23 \cdot x^2 + 2{,}24 \cdot y^2 = 5{,}00$.

Notiamo che l'equazione della traiettoria è la stessa anche nel caso in cui il Sole occupi il fuoco S'.
In alternativa, avremmo potuto fissare un sistema di riferimento in cui l'origine degli assi è occupata dal Sole. In questa ipotesi, avremmo ottenuto l'equazione di un'ellisse con i fuochi sull'asse x congruente a quella ricavata nello svolgimento sopra e ottenuta attraverso una traslazione di vettore $\vec{v}(-c; 0)$:

$$\frac{(x+0{,}025)^2}{2{,}24}+\frac{y^2}{2{,}23}=1.$$

8 Indichiamo con R il raggio della circonferenza circoscritta e con r il raggio della circonferenza inscritta, ovvero l'apotema.
Il triangolo OAB è equilatero, perché i lati OA e OB sono congruenti in quanto raggi della circonferenza, e l'angolo $A\hat{O}B$ ha ampiezza $\frac{360°}{6}=60°$.
Tracciata l'altezza OH, abbiamo allora che $\overline{OA}=R$, $\overline{OH}=r$ e $\overline{AH}=\frac{R}{2}$.
Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{AH}^2+\overline{OH}^2=\overline{OA}^2 \rightarrow \left(\frac{R}{2}\right)^2+r^2=R^2 \rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

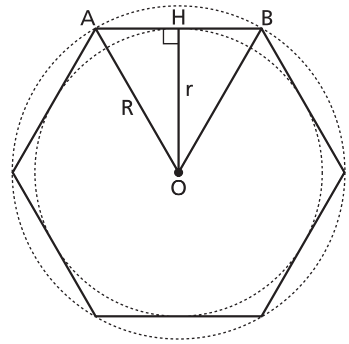


Figura 19

Nel caso esaminato dallo scrittore, si ha $R = 60$ mm, quindi

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 60 \text{ mm}=30\sqrt{3}\text{ mm}\simeq 51{,}96 \text{ mm}=5{,}196 \text{ cm}.$$

Le misure riportate nel testo risultano quindi coerenti.
La possibilità di pavimentare (o tassellare) il piano con esagoni regolari congruenti segue dal fatto che l'ampiezza degli angoli interni dell'esagono regolare è:

$$\frac{(6-2)\cdot 180°}{6}=120°, \text{ che è un divisore di } 360°.$$

In generale, è possibile tassellare il piano con poligoni regolari congruenti di n lati se e solo se l'ampiezza degli angoli interni, in gradi, è un divisore di 360°. Deve essere quindi verificata la condizione:

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=\frac{360°}{k},$$

con k intero positivo. Isolando k dalla precedente relazione, otteniamo:

$$k=\frac{2n}{n-2}.$$

Riscriviamo la frazione nel modo seguente:

$$k=\frac{2n}{n-2}=\frac{2(n-2)+4}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}.$$

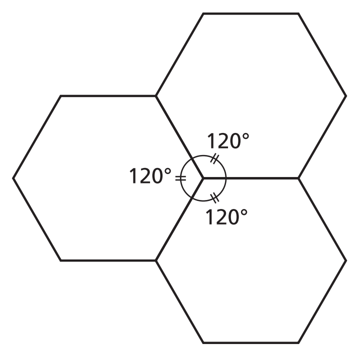


Figura 20

Quindi k è un numero intero se e solo se $n-2$ è un divisore di 4. Le possibilità sono:

$$n-2=-4, -2, -1, 1, 2, 4 \rightarrow n=-2, 0, 1, 3, 4, 6.$$

Non esistono poligoni con meno di 3 lati, quindi deve essere $n \geq 3$. Le uniche soluzioni accettabili sono quindi $n=3$, $n=4$ e $n=6$. Ne deriva che i poligoni regolari, congruenti tra loro, con cui è possibile tassellare il piano sono tre: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.

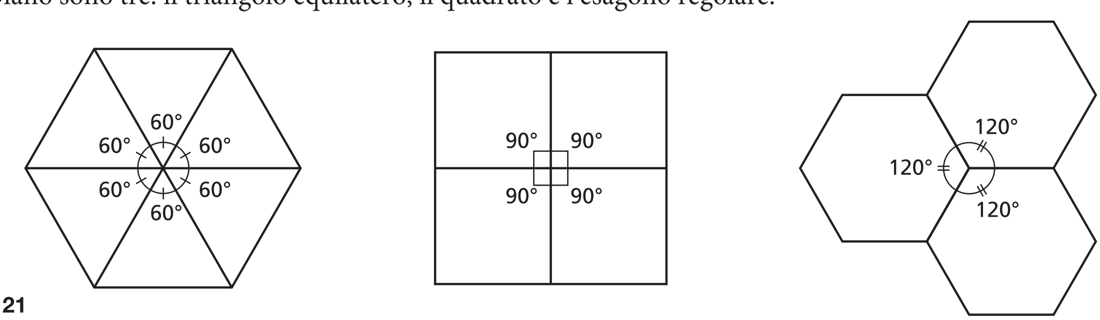


Figura 21